B A D A N I A O P E R A C Y J N E I D E C Y Z J E

Nr 3–4 2005

Anna RUTKOWSKA-ZIARKO*

METODY ZNAJDOWANIA PORTFELA EFEKTYWNEGO DLA SEMIWARIANCJI

W klasycznym modelu Markowitza ryzyko jest mierzone wariancją stóp zwrotu. Pewną wadą wariancji jako miary ryzyka jest jednakowe traktowanie odchyleń ujemnych i dodatnich od oczekiwanej stopy zwrotu. Markowitz do mierzenia tylko odchyleń ujemnych zdefiniował semiwariancję. Jednak znalezienie portfela o minimalnej semiwariancji jest znacznie trudniejsze niż znalezienie portfela o minimalnej wariancji. Nową metodę znajdowania portfela o minimalnej semiwariancji zaproponowano w niniejszej pracy.

Słowa kluczowe: *ryzyko, semiwariancja, wybór portfela, portfel efektywny*

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych założeń w teorii portfelowej jest przyjęcie, że racjonalny inwestor poszukuje portfela efektywnego, czyli takiego, który przy danej stopie zwrotu posiadałby najniższe ryzyko, zaś dla danego poziomu ryzyka charakteryzowałby się najwyższą stopą zwrotu [6].

W klasycznym modelu Markowitza [6] ryzyko jest mierzone wariancją stóp zwrotu. Pewną wadą wariancji jako miary ryzyka jest jednakowe traktowanie odchyleń ujemnych i dodatnich od oczekiwanej stopy zwrotu. W rzeczywistości odchylenia ujemne są niepożądane, a dodatnie stwarzają możliwość większego zysku. Dla mierzenia tylko odchyleń ujemnych Markowitz zdefiniował semiwariancję [7]. Najważniejszą cechą semiwariancji jest to, że mierzy ona odchylenia tylko poniżej określonego poziomu. Istnieją dwie odmiany semiwariancji w zależności od przyjętego punktu odniesienia dla wyznaczania odchyleń. Punktem odniesienia może być średnia

* Katedra Metod Ilościowych, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie, ul. Oczapowskiego 5, 10-957 Olsztyn, aniarek@uwm.edu.pl

stopa zwrotu bądź stopa zwrotu założona przez inwestora. Występuje wówczas odpowiednio poniżej średniej semiwariancja albo semiwariancja od założonej stopy zwrotu, nazywana również γ-semiwariancją.

Zwolennicy stosowania semiwariancji jako miary ryzyka podkreślają, że lepiej opisuje ona faktyczne preferencje inwestorów niż wariancja [5], [7], [8], [10], [11], [14]. Jednak pojawiły się problemy z zastosowaniem semiwariancji w praktyce. Znalezienie portfela o minimalnej semiwariancji jest znacznie trudniejsze niż znalezienie portfela o minimalnej wariancji [7], [13].

Celem pracy jest zaprezentowanie istniejących algorytmów znajdowania portfela efektywnego dla γ-semiwariancji oraz zaproponowanie alternatywnej metody znajdowania portfela o minimalnej γ-semiwariancji.

2. Klasyczny model Markowitza i model o minimalnej semiwariancji

W klasycznym modelu Markowitza [6] zyskowność portfela jest utożsamiana z oczekiwaną stopą zwrotu, w praktyce zastępowana średnią stopą zwrotu, a ryzyko jest mierzone wariancją stóp zwrotu. U podstaw tego modelu leżą następujące założenia:

(a) portfel zawiera k akcji, $A_1, A_2, ..., A_k$;

(b) udziały akcji w portfelu są zróżnicowane, co opisuje wektor $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, ..., x_k)^T$ o składowych nieujemnych $(x_i \geq 0)$ oraz unormowanych do jedności:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{1}$$

w zapisie macierzowym

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{I}_k = 1, \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{I}_\mathrm{k} = (1, 1, ..., 1)^T$ jest wektorem k-wymiarowym o składowych równych jeden;

(c) dla każdej akcji A_i, $i = 1, 2, ..., k$ rozważany okres jest dzielony na m jednostek czasowych, w których dokonuje się rejestracji stóp zwrotu z_{it}, gdzie $t = 1, 2, ..., m$, momenty czasowe powinny być te same dla wszystkich rozważanych akcji.

Średnie stopy zwrotu poszczególnych akcji wyznaczamy ze wzoru

$$\bar{z}_i = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m} z_{it}, \quad i = 1, 2, ..., k. \tag{3}$$

Średnią stopę zwrotu z portfela zawierającego k akcji wyraża średnia ważona

$$\bar{z}_p = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{z}_i = \boldsymbol{X}^T \overline{\boldsymbol{Z}}\,, \tag{4}$$

gdzie $\overline{\boldsymbol{Z}} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_k)^T$ jest wektorem średnich stóp zwrotu.

Jak widać, $\bar{z}_p$ zależy zarówno od średnich stóp zwrotu poszczególnych akcji, jak i od ich udziału w portfelu. Rozpatrując kolumny macierzy $\boldsymbol{Z}$ o elementach z_{it}, uzyskuje się informację o stopach zwrotu rozważanych akcji w poszczególnych momentach czasowych. Akcje te występują z różnym udziałem, co wyraża wektor $\boldsymbol{X}$, można więc wyznaczyć iloczyny skalarne

$$z_{pt} = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Z}_t = \sum_{i=1}^{k} x_i z_{it}\,, \quad t = (1, 2, ..., m)\,, \tag{5}$$

gdzie $\boldsymbol{Z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, ..., z_{kt})^T$ jest t–tą kolumną macierzy $\boldsymbol{Z}$.

Stopy zwrotu z portfela z_{pt} mogą być porównywane ze średnią $\bar{z}_p$ tych stóp zwrotu. Za miarę odchyleń z_{pt} od $\bar{z}_p$ przyjmuje się wariancję stóp zwrotu portfela

$$s_p^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(z_{pt} - \bar{z}_p)^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}})(\boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}})^T\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}\,, \tag{6}$$

gdzie

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(\boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}})(\boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}})^T\,, \tag{7}$$

jest $(k \times k)$-wymiarową macierzą wariancji–kowariancji z próby. Wariancja portfela może być wyrażona w postaci

$$s_p^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 c_{ii} + 2\sum_{1\le i<j\le k} x_i x_j c_{ij}\,, \tag{8}$$

gdzie:

$$c_{ii} = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(z_{it} - \bar{z}_i)^2 \tag{9}$$

jest wariancją stóp zwrotu dla i-tej akcji, natomiast

$$c_{ij} = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m}(z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt} - \bar{z}_j) \tag{10}$$

jest kowariancją stóp zwrotu dla i-tej oraz j-tej akcji.

W klasycznym modelu Markowitza problem wyznaczenia wektora $\boldsymbol{X}$ udziałów akcji sprowadza się do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego: zminimalizować funkcję

$$s_p^2 = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{X}\,, \tag{11}$$

przy ograniczeniach:

$$\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{I}_k = 1\,, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{X}^T \overline{\boldsymbol{Z}} \geq \gamma\,, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{X} \in R^k, \quad \boldsymbol{X} \geq 0\,, \tag{14}$$

gdzie γ – określona z góry stopa zwrotu całego portfela, przy założeniu $\gamma \leq \max \bar{z}_i$.

Podstawiając w modelu Markowitza za γ różne wartości z przedziału $< \min \bar{z}_i ; \max \bar{z}_i >$, otrzymujemy granicę efektywną, utworzoną z portfeli posiadających najniższe wariancje dla poszczególnych zadanych stóp zwrotu. Postępując według tej procedury, możemy uznać za nieefektywne portfele o niskich ujemnych odchyleniach od zadanej stopy zwrotu i jednocześnie dużych odchyleniach dodatnich, a więc bardzo korzystne dla inwestorów mimo wysokiej wariancji.

W monografii dotyczącej wyboru portfela Markowitz [7] proponuje semiwariancję od założonej stopy zwrotu $(ds_p^2(\gamma))$ jako alternatywną do wariancji miarę ryzyka

$$ds_p^2(\gamma) = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^{m} {d_{pt}}^2(\gamma)\,, \tag{15}$$

gdzie:

$$d_{pt}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{pt} \geq \gamma \\ z_{pt} - \gamma & \text{dla } z_{pt} < \gamma \end{cases}. \tag{16}$$

Po skorzystaniu ze wzoru (5) i warunku unormowania (1) otrzymujemy

$$ds_p^2(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j d_{ij}(\gamma)\,, \tag{17}$$

gdzie

$$d_{ij}(\gamma) = \frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^{m} d_{ijt}(\gamma)\,, \tag{18}$$

gdzie

$$d_{ijt}(\gamma)=\begin{cases}0 & \text{dla } z_{pt}\ge\gamma\\(z_{it}-\gamma)(z_{jt}-\gamma) & \text{dla } z_{pt}<\gamma\end{cases}. \tag{19}$$

Wyznaczenie portfeli efektywnych dla ryzyka rozumianego jako możliwość osiągnięcia stopy zwrotu niższej od zadanej sprowadza się do minimalizacji semiwariancji od założonej stopy zwrotu przy określonym z góry γ, a więc do rozwiązania następującego zagadnienia optymalizacyjnego:
zminimalizować funkcję

$$ds_p^2(\gamma)=\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{D}(\gamma)\boldsymbol{X}, \tag{20}$$

przy ograniczeniach jak w modelu Markowitza (12)–(14), gdzie $\boldsymbol{D}(\gamma)$ jest macierzą semiwariancji–semikowariancji od założonej stopy zwrotu γ o elementach $d_{ij}(\gamma)$.

Poszukując efektywnego portfela dla ryzyka mierzonego semiwariancją minimalizuje się sumę kwadratów odchyleń „w dół" od założonej stopy zwrotu, nie ma natomiast żadnych ograniczeń nałożonych na odchylenia „w górę". Portfel efektywny minimalizujący ryzyko rozumiane jako wariancja stóp zwrotu będzie nazywany portfelem Markowitza, natomiast minimalizujący semiwariancję od założonej stopy zwrotu – portfelem SEM.

Stosowanie semiwariancji do wyznaczania portfeli efektywnych stwarza jednak duże problemy, gdyż istniejące programy optymalizacyjne nie są tak skonstruowane, by budować portfele w oparciu o tę miarę ryzyka [1]. Problem polega na tym, że wyznaczając macierz $\boldsymbol{D}(\gamma)$, musimy wiedzieć, w których okresach stopa zwrotu całego portfela była niższa od założonej, a to zależy zarówno od założonej stopy zwrotu, jak i od składu portfela. To sprawia, że wyznaczanie portfeli efektywnych dla semiwariancji od założonej stopy zwrotu jest bardziej złożone niż dla wariancji. Do wyznaczenia składu portfela Markowitza dla dowolnego γ wystarczy znajomość elementów macierzy wariancji–kowariancji $\boldsymbol{C}$ oraz wektora średnich stóp zwrotu. $\overline{\boldsymbol{Z}}$, $\boldsymbol{C}$ i $\overline{\boldsymbol{Z}}$ są jednorazowo szacowane i nie zależą ani od składu portfela, ani od założonej stopy zwrotu γ. Podczas wyznaczania portfela SEM natomiast każdorazowo przy zmianie składu portfela lub założonej stopy zwrotu γ należy ponownie oszacować elementy macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$.

3. Metoda linii krytycznej

Markowitz do wyznaczania zbioru efektywnego, zarówno dla ryzyka mierzonego wariancją jak i semiwariancją, wykorzystał fakt, że powyższe problemy są segmentami zagadnieniami programowania liniowego [8, s. 317, 338]. Wprowadził pojęcie przestrzeni portfeli, będącej zbiorem wszystkich portfeli dopuszczalnych. Autor ten nie brał pod uwagę krótkiej sprzedaży, dlatego też portfele spełniają warunek, że udziały akcji w portfelu są nieujemne, a ich suma równa się jeden. W przestrzeni portfeli wyodrębnił podprzestrzenie. Podprzestrzenią nazwał każdy podzbiór przestrzeni portfeli [7]. Mając do dyspozycji k akcji, możemy wyodrębnić L podprzestrzeni i-wymiarowych $(i = 1,\ 2, ..., k)$. Liczba tych podprzestrzeni zależy od k i wynosi $L = 2^k - 1$. Istnieje zawsze jedna podprzestrzeń k-wymiarowa i k podprzestrzeni jednowymiarowych. Dla danego i liczba podprzestrzeni wynosi $\binom{k}{i}$. Oznaczmy przez P_l l-tą podprzestrzeń o wymiarze J_l, określoną przez zbiór indeksów $j(l)$ akcji, które w niej występują

$$j(l) = 1,\ 2, ..., J_l\,. \tag{21}$$

Spełnione są wtedy następujące warunki:

$$\sum_{j(l)=1}^{J_l} x_{j(l)} = 1\,, \tag{22}$$

$$x_{j(l)} > 0\,, \tag{23}$$

$$x_i (i \neq j(l)) = 0\,. \tag{24}$$

Dla każdej podprzestrzeni istnieje linia krytyczna, będąca linią prostą, na której leżą portfele efektywne [8]:

$$\boldsymbol{M}_l \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_l \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_l \\ 1 \\ \gamma \end{bmatrix} + \lambda_E \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{Z}}_l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

gdzie:

$\boldsymbol{M}_l$ – macierz $((J_l + 2) \times (J_l + 2))$-wymiarowa, powstała z macierzy $\boldsymbol{M}$ przez wykreślenie kolumn i wierszy odpowiadających akcjom niewystępującym w danej podprzestrzeni:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \overline{\boldsymbol{Z}} & \boldsymbol{I}_k \\ \overline{\boldsymbol{Z}}^T & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{I}_k^T & & \end{bmatrix}, \tag{26}$$

0 – dwuwymiarowy wektor kolumnowy składający się z zer,

$\mathbf{0}_l$ – J_l-wymiarowy wektor kolumnowy składający się z zer,

$\boldsymbol{X}_l$ – J_l-wymiarowy wektor kolumnowy udziałów akcji w portfelu dla danej podprzestrzeni,

$\overline{\boldsymbol{Z}}_l$ – J_l-wymiarowy wektor kolumnowy średnich stóp zwrotu dla danej podprzestrzeni,

λ_1, λ_2, λ_E – mnożniki Lagrange'a.

Wyznaczenie składu portfela efektywnego jest segmentami zagadnieniem liniowym. Wszystkie portfele efektywne leżą na liniach krytycznych, lecz nie każdy portfel z linii krytycznej jest efektywny [7].

Warto podkreślić, że gdy dozwolona jest krótka sprzedaż bez żadnych ograniczeń, wówczas kombinacje liniowe portfeli efektywnych same są portfelami efektywnymi [4]. Jeżeli nie można stosować krótkiej sprzedaży, zależność ta jest prawdziwa tylko dla portfeli należących do jednej podprzestrzeni [7]. Uwzględnienie krótkiej sprzedaży powoduje, że wszystkie możliwe do zbudowania portfele należą do jednej k-wymiarowej przestrzeni, z tym że udziały akcji w portfelu mogą być ujemne.

Chcąc wyznaczyć zbiór minimalnego ryzyka, można rozpocząć poszukiwania od portfela o maksymalnej stopie zwrotu i podążać linią krytyczną, na której on leży, w kierunku malejącej stopy zwrotu (wariancji) tak długo, aż nie spotkamy innej linii krytycznej. Po przecięciu się linii krytycznych obieramy nowo napotkaną linię i podążamy nią w kierunku malejącej stopy zwrotu aż do skrzyżowania z następną linią. Procedurę tę powtarzamy tak długo, aż znajdziemy się w punkcie minimalnej wariancji. Daną linię krytyczną może przecinać wiele innych linii krytycznych. Wybieramy tę, którą napotkamy pierwszą, czyli mającą punkt przecięcia dla najwyższego λ_E (co odpowiada najwyższej stopie zwrotu i najwyższej wariancji). Dla portfela o minimalnej wariancji $\lambda_E = 0$, natomiast dla portfela o maksymalnej stopie zwrotu $\lambda_E = \infty$.

Można też wyznaczanie granicy efektywnej rozpocząć od portfela o minimalnej wariancji i przesuwając się po liniach krytycznych dojść do portfela o maksymalnej stopie zwrotu. Jednak wyjście od portfela o maksymalnej stopie jest dogodniejsze ze względu na łatwość wyznaczenia jego składu, występują w nim bowiem tylko akcje jednej, najbardziej zyskownej spółki.

Modyfikację powyższej metody wykorzystał Markowitz do wyznaczenia zbioru minimalnego ryzyka dla semiwariancji od założonej stopy zwrotu, wstawiając macierz semiwariancji-semikowariancji $\boldsymbol{D}(\gamma)$, zamiast macierzy $\boldsymbol{C}$, w macierzy $\boldsymbol{M}$. Jeżeli jednak linia krytyczna przecięła jedną z linii zyskowności: $\sum_{i=1}^{k} x_i z_{it} = \gamma$, to na nowo szacowane są elementy macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$ [7]. Linii zyskowności jest tyle, ile rozpatrywanych okresów. Przecięcie t-tej linii zyskowności oznacza, że dla danego t zmienił się zwrot nierówności

$$z_{pt} > \gamma \text{ na } z_{pt} < \gamma, \text{ lub } z_{pt} < \gamma \text{ na } z_{pt} > \gamma .$$

Ponieważ wychodzimy od portfela z akcjami jednej najbardziej zyskownej spółki, dla pierwszej linii krytycznej w macierzy $\boldsymbol{M}_{jl}$ z macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$ pozostaje więc tylko jedna liczba równa γ-semiwariancji dla tej spółki.

Do wyznaczenia całej granicy efektywnej dla wariancji potrzebne są jedynie średnie stopy zwrotu poszczególnych akcji oraz macierz wariancji – kowariancji stóp zwrotu. W przypadku semiwariancji musimy cały czas dysponować pełnym zestawem stóp zwrotu poszczególnych akcji we wszystkich rozpatrywanych jednostkach czasowych. Jest to potrzebne do szacowania elementów macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$, jak również do wyznaczania linii zyskowności. Wyznaczenie zbioru minimalnego ryzyka dla semiwariancji jest więc bardziej czasochłonne niż dla wariancji.

4. Metody quasi-optymalne

Przedstawione przez Markowitza [7], [8] procedury znajdowania portfela efektywnego dla ryzyka mierzonego wariancją oraz semiwariancją od założonej stopy zwrotu należą do klasy metod optymalnych. Znalezienie portfela efektywnego o minimalnej semiwariancji (semiwariancji od założonej stopy zwrotu), zgodnie z algorytmem Markowitza, nie było zbyt dogodne, dlatego poszukiwano uproszczonych metod znajdowania rozwiązania quasi-optymalnego; metody te bazują na mieszanych dolnych momentach cząstkowych n-tego stopnia (*clpm – co-lower partial moment*).

Podobnie jak w przypadku wariancji i semiwariancji, dolny moment cząstkowy portfela akcji nie jest prostą sumą dolnych momentów cząstkowych poszczególnych akcji. Stosuje się dwie metody wyznaczania dolnych momentów cząstkowych dla portfela akcji. W jednej wykorzystuje się niesymetryczne mieszane dolne momenty cząstkowe, w drugiej – symetryczne. Obydwie metody dają przybliżone oceny dolnych momentów cząstkowych n-tego stopnia portfela (lpm_{pn}). Nie określa się w nich okresów, w których stopa zwrotu z portfela była wyższa od założonej stopy zwrotu, a w których niższa. W zależności od sposobu szacowania dolnych momentów cząstkowych portfela wyróżniamy dwa rodzaje algorytmów [9]:

a) asymetryczny – ALPM,

b) symetryczny – LPM.

W algorytmie asymetrycznym wykorzystuje się niesymetryczne mieszane dolne momenty cząstkowe n-tego stopnia ($clpm_{ij,n-1}$) [9]:

$$clpm_{ij,n-1} = \frac{1}{m-1}\sum_{t=1}^{m} lpm_{it}^{n-1}(\gamma - z_{jt}) , \tag{27}$$

gdzie

$$lpm_{it} = \begin{cases} 0 & \text{dla } z_{it} \geq \gamma \\ \gamma - z_{it} & \text{dla } z_{it} < \gamma \end{cases}. \tag{28}$$

Dla $n \geq 1$ zachodzi

$$clpm_{ij,n-1} \neq clpm_{ji,n-1}, \quad \text{jeżeli} \quad i \neq j. \tag{29}$$

Dla algorytmu asymetrycznego zagadnienie budowy portfela przyjmie postać: zminimalizować funkcję:

$$lpm_{pn} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j clpm_{ij,n-1}, \tag{30}$$

przy ograniczeniach jak w modelu Markowitza.

W algorytmie symetrycznym wykorzystuje się symetryczne mieszane dolne momenty cząstkowe n-tego stopnia $clpm_{ijn}$, [9]:

$$clpm_{ijn} = sd_{in} sd_{jn} r_{ij}, \tag{31}$$

gdzie:

r_{ij} – współczynnik korelacji pomiędzy stopami zwrotu akcji i-tej i j-tej,

sd_{in} – semiodchylenie n-tego stopnia,

$$sd_{in} = \sqrt[n]{\frac{1}{m-1} \sum_{t=1}^{m} lpm_{it}^{n}}. \tag{32}$$

W przeciwieństwie do $clpm_{ij,n-1}$, $clpm_{ijn}$ jest miarą symetryczną:

$$clpm_{ijn} = clpm_{jin}. \tag{33}$$

Dla algorytmu symetrycznego zagadnienie budowy portfela przyjmie postać: zminimalizować funkcję:

$$lpm_{pn} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} x_i x_j clpm_{ijn}, \tag{34}$$

przy ograniczeniach jak w modelu Markowitza.

Metody ALPM i LPM są dogodniejsze w stosowaniu od metody Markowitza. Do znalezienia składu portfela zgodnie z ALPM lub LPM można użyć dowolnej metody programowania kwadratowego bądź nieliniowego, a także metodę linii krytycznej. Metody te są do dziś stosowane w praktyce [2]; ich zaletą jest możliwość wykorzystania jednego z wielu gotowych programów służących do optymalizacji kwadratowej bądź nieliniowej. Niestety otrzymane rozwiązanie jest quasi-optymalne i nie wiadomo jak bardzo odbiega od rozwiązania optymalnego. Należy także podkreślić, że ALPM może dawać inny skład portfela niż LPM [2].

5. Propozycja alternatywnej metody optymalnej

Metoda zaproponowana przez Markowitza jest trudna do zaprogramowania, a istniejące programy optymalizacyjne dla tej metody są praktycznie niedostępne. Natomiast w przypadku opisanych w poprzednim podrozdziale algorytmów quasi-optymalnych można zastosować dowolny gotowy program komputerowy z zakresu programowania kwadratowego bądź nieliniowego, jednak otrzymane rozwiązanie nie będzie optymalne a jedynie do niego zbliżone. Dodatkowym ograniczeniem stosowania gotowych procedur jest czasochłonność wprowadzania danych. Przy 100 akcjach dla algorytmu symetrycznego należy wprowadzić 5050 elementów funkcji celu dla asymetrycznego 10000.

W celu budowy portfeli optymalnych w sensie minimalnej γ-semiwariancji pojawiła się konieczność sformułowania nowego algorytmu i napisanie odpowiadającego mu programu optymalizacyjnego. Chodziło o znalezienie takiego algorytmu, który dawałby rozwiązanie optymalne, a jednocześnie był prosty i łatwy do zaprogramowania.

Zagadnienie wyznaczania portfela efektywnego minimalizującego semiwariancję od założonej stopy zwrotu zostało rozwiązane iteracyjnie. Wychodząc od dowolnego portfela spełniającego warunek (1), np. portfela Markowitza, powtarzamy aż do samouzgodnienia[1] składu portfela następujący schemat postępowania [13]:

1. Wyznaczenie stóp zwrotu portfela z_{pt} w poszczególnych jednostkach czasowych według (5).
2. Wyznaczenie elementów macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$ (18), (19).
3. Dla wyznaczonej w punkcie 2. macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$ minimalizowanie względem wektora $\boldsymbol{X}$ funkcji

$$ds_p^2(\gamma) = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{D}(\gamma) \boldsymbol{X} ,$$

przy ograniczeniach (12)–(14).

W dalszej części pracy powyższy schemat będzie nazywany schematem SEM.

Punkt 3. różni się od klasycznego modelu Markowitza tylko tym, że macierz wariancji–kowariancji $\boldsymbol{C}$ we wzorze (11) została zastąpiona macierzą $\boldsymbol{D}(\gamma)$, która zależy

[1] Samouzgodnienie jest tu rozumiane jako ustabilizowanie się składu portfela z zadaną przez badacza dokładnością.

nie tylko od założonej przez inwestora stopy zwrotu γ, ale także od wektora $\boldsymbol{X}$ otrzymanego w poprzedniej iteracji. Do znalezienia składu portfela Markowitza oraz składu portfela SEM w kolejnych iteracjach schematu SEM wykorzystano algorytm Wolfa programowania kwadratowego [3]. Należy podkreślić, że wyznaczanie składu portfela Markowitza oraz portfela minimalizującego semiwariancję w kolejnych przejściach przez punkt 3. jest zagadnieniem niezależnym od zaproponowanego schematu. Algorytm Wolfa jest tu wykorzystywany jako podprogram i mógłby zostać zastąpiony dowolnym algorytmem programowania nieliniowego, co nie miałoby wpływu na sam schemat SEM.

W celu zastosowania algorytmu Wolfa konieczne jest doprowadzenie modelu Markowitza oraz modelu SEM do postaci:
zminimalizować:

$$-\boldsymbol{PX}' + \boldsymbol{X}'^{T}\boldsymbol{GX}', \tag{35}$$

przy ograniczeniach:

$$\boldsymbol{AX}' \le \boldsymbol{B}, \tag{36}$$

$$\boldsymbol{X}' \ge 0, \tag{37}$$

gdzie $\boldsymbol{P}$ jest wektorem, a $\boldsymbol{G}$ jest macierzą kwadratową.

Najpierw dokonuje się przenumerowania wektora $\boldsymbol{X}$ tak, aby x_i odpowiadający spółce o najwyższym ryzyku był ostatni. W modelu Markowitza x_k będzie udziałem spółki o najwyższej wariancji. Następnie wyznacza się x_k z warunku (12):

$$x_k = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i . \tag{38}$$

Wykorzystując powyższe podstawienie dokonuje się eliminacji x_k z warunków ograniczających oraz funkcji celu, a model Markowitza zostaje przekształcony do postaci (35)–(37). Wówczas $\boldsymbol{X}'$ będzie wektorem (k – 1)-wymiarowym, o elementach x_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Powstaje on z wektora $\boldsymbol{X}$ po usunięciu k-tego elementu. Macierz $\boldsymbol{G}$ będzie macierzą kwadratową (k-1)-wymiarowa, o elementach g_{ij}:

$$g_{ij} = c_{ij} + c_{kk} - c_{kj} - c_{ik}, \tag{39}$$

gdzie c_{ij} jest kowariancją stóp zwrotu dla i-tej oraz j-tej akcji.

Wyznaczmy elementy na głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{G}$. Po podstawieniu we wzorze (39) ze wzorów (9)–(10) otrzymujemy:

$$g_{ii} = c_{ii} + c_{kk} - c_{ki} - c_{ik},$$

$$g_{ii} = \sum_{t=1}^{m} (z_{it} - \bar{z}_i)^2 + \sum_{t=1}^{m} (z_{kt} - \bar{z}_k)^2 - 2\sum_{t=1}^{m} (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{kt} - \bar{z}_k) . \tag{40}$$

Ponieważ $(a^2 + b^2 - 2ab)$ jest zawsze nieujemne, elementy na głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{G}$ są więc nieujemne.

Z kolei $\boldsymbol{P}$ będzie wektorem $(k - 1)$-wymiarowym, o elementach p_i:

$$p_i = -2c_{kk} + c_{kj} + c_{ik} . \tag{41}$$

Z faktu, iż c_{kk} jest największym elementem macierzy $\boldsymbol{C}$ wynika, że elementy wektora $\boldsymbol{P}$ są ujemne.

Po podstawieniu x_k w postaci (38) do warunku (13) otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \bar{z}_i x_i + \bar{z}_k \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \right) \geq \gamma , \tag{42}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\bar{z}_i - \bar{z}_k) x_i + \bar{z}_k \geq \gamma , \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\bar{z}_k - \bar{z}_i) x_i \leq \bar{z}_k - \gamma . \tag{44}$$

Ponieważ udziały akcji w portfelu są nieujemne, ze wzoru (38) otrzymuje się

$$1 - \sum_{i=1}^{k-1} x_i \geq 0 . \tag{45}$$

Warunek (12) przyjmie zatem postać

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i \leq 1 . \tag{46}$$

Macierz $\boldsymbol{A}$ będzie macierzą o wymiarach $(2 \times (k-1))$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 - \gamma & \bar{z}_2 - \gamma & \ldots & \bar{z}_{k-1} - \gamma \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

$\boldsymbol{B}$ będzie wektorem dwuwymiarowym:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \bar{z}_k - \gamma \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

W metodzie Wolfa wprowadza się wektory zmiennych dodatkowych $\boldsymbol{X}^d$ i $\boldsymbol{Y}^d$ takich, że:

$$\boldsymbol{YX}^d + \boldsymbol{Y}^d \boldsymbol{X}' = 0, \tag{49}$$

$$\boldsymbol{X}^d = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{AX}', \tag{50}$$

$$\boldsymbol{Y}^d = 2\boldsymbol{X}'^T \boldsymbol{G} + \boldsymbol{YA} - \boldsymbol{P}, \tag{51}$$

gdzie $\boldsymbol{Y}$ jest wektorem zmiennych decyzyjnych modelu dualnego, odpowiadającego modelowi prymalnemu (35)–(37), a wymiar tego wektora jest równy liczbie warunków ograniczających w modelu prymalnym. Wektor $\boldsymbol{X}^d$ ma taki sam wymiar jak wektor $\boldsymbol{X}'$, natomiast wymiar wektora $\boldsymbol{Y}^d$ jest takim sam jak wektora $\boldsymbol{Y}$ i zależy od liczby warunków ograniczających w modelu (35)–(37).

W metodzie Wolfa zamiast rozwiązywać model w postaci (35)–(37), wprowadza się wektor $\boldsymbol{W}$ zmiennych sztucznych o elementach w_i i minimalizuje się sumę zmiennych sztucznych, czyli rozwiązuje się zadanie:
zminimalizować:

$$\sum_{i=1}^{k-1} w_i \tag{52}$$

przy ograniczeniach:

$$\boldsymbol{X}^d + \boldsymbol{AX}' = \boldsymbol{B}, \tag{53}$$

$$2\boldsymbol{X}'^T \boldsymbol{D} + \boldsymbol{YA} - \boldsymbol{Y}^d + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}, \tag{54}$$

$$\boldsymbol{X}' \geq 0; \quad \boldsymbol{X}^d \geq 0; \quad \boldsymbol{Y} \geq 0; \quad \boldsymbol{Y}^d \geq 0; \quad \boldsymbol{W} \geq 0, \tag{55}$$

$$x_i y_j^d = 0; \quad x_j^d y_j = 0; \quad i = (1, ..., k-1); \quad j = (1, 2). \tag{56}$$

Zgodnie z algorytmem Wolfa badamy znaki wyrazów wolnych układów równań (53)–(54):

- jeśli $b_j \geq 0$, to j-te równanie zostawiamy bez zmiany, traktując zmienną x_j^d jako zmienną bazową,
- jeśli $b_j < 0$, to j-te równanie mnożymy stronami przez (–1) i do lewej strony otrzymanego równania dodajemy zmienną sztuczną v_j, traktując ją jako zmienną bazową,
- jeśli $p_i \leq 0$, to i-te równanie mnożymy przez (–1) i traktujemy zmienną y_i^d jako zmienną bazową,
- jeśli $p_i > 0$, to do lewej strony równania dodajemy zmienną sztuczną w_i, traktując ją jako zmienną bazową.

W naszym przypadku:

- $p_i \le 0$, dla każdego i ($(i = 1, 2, ..., k-1)$, więc czwarty warunek nie wystąpi,
- $b_2 = 1$,
- b_1 jest dodatnie, jeśli spółka charakteryzująca się najwyższą średnią stopą zwrotu posiada równocześnie najwyższą wariancję stóp zwrotu: jeżeli tak nie jest, to do tablicy startowej dodajemy kolumnę odpowiadającą zmiennej sztucznej v_1.

Dla modelu Markowitza tablica startowa przyjmie jedną z dwóch postaci w zależności od znaku b_1 [12].

Tablica startowa dla $b_1 > 0$

	x_1	$\cdots$	x_{k-1}	y_1^d	$\cdots$	y_{k-1}^d	w_1	$\cdots$	w_{k-1}	y_1	y_2	x_1^d	x_2^d	H_0	$f.c$
x_1^d	$\bar{z}_1-\gamma$	$\cdots$	$\bar{z}_{k-1}-\gamma$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	1	0	$\bar{z}_k-\gamma$	0
x_2^d	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	1	1	0
w_1	$2d_{11}$	$\cdots$		-1	0	0	1	0	0	$\bar{z}_1-\gamma$	1	0	0	p_1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0	$\ddots$	0	0	$\ddots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_{k-1}		$\cdots$	$2d_{k-1,\,k-1}$	0	0	-1	0	0	1	$\bar{z}_{k-1}-\gamma$	1	0	0	p_{k-1}	1

Tablica startowa dla $b_1 \le 0$, z dodaną zmienną sztuczną v_1

	x_1	$\ldots$	x_{k-1}	y_1^d	$\cdots$	y_2^d	w_1	$\cdots$	w_{k-1}	y_1	y_2	x_1^d	x_2^d	v_1	H_0	$f.c.$
x_1^d	$-\bar{z}_1+\gamma$	$\cdots$	$-\bar{z}_{k-1}+\gamma$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	1	0	1	$\bar{z}_k-\gamma$	0
x_2^d	1	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	1	0	1	0
w_1	$2d_{11}$	$\cdots$		-1	0	0	1	0	0	$\bar{z}_1-\gamma$	1	0	0	0	p_1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	0	$\ddots$	0	0	$\ddots$	0	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
w_{k-1}		$\cdots$	$2d_{k-1,k-1}$	0	0	-1	0	0	1	$\bar{z}_{k-1}-\gamma$	1	0	0	0	p_{k-1}	1

W modelu SEM postać tablic startowych będzie taka sama jak w modelu Markowitza. Inaczej będzie przebiegać przenumerowanie wektora $\boldsymbol{X}$. Jego składowa x_k jest teraz udziałem spółki o największej wartości z głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$. W inny sposób są też wyznaczone elementy macierzy $\boldsymbol{G}$ oraz wektora $\boldsymbol{P}$:

$$g_{ij} = d_{ij}(\gamma) + d_{kk}(\gamma) - d_{kj}(\gamma) - d_{ik}(\gamma)\,, \tag{57}$$

$$p_i = -2d_{kk}(\gamma) + d_{kj}(\gamma) + d_{ik}(\gamma)\,. \tag{58}$$

W modelu Markowitza dla danego γ budowana jest jedna tablica startowa i zgodnie z algorytmem Wolfa poszukiwane jest rozwiązanie optymalne. W modelu SEM natomiast nowa tablica startowa jest budowana każdorazowo przy przejściu przez punkt 3. procedury przedstawionej na początku podrozdziału, aż do samouzgodnienia składu portfela.

Do wyznaczenia portfeli efektywnych w opisany sposób napisany został program w języku programowania Delphi, co umożliwiło przygotowanie przystępnego interfejsu użytkownika. Przedstawioną procedurę charakteryzuje łatwość wprowadzania danych i odczytywania wyników. Program wymaga dostarczenia pliku z danymi (notowania spółek w określonym przedziale czasowym), podania liczby obserwacji, długości okresu inwestycyjnego (wyrażonego w dniach) oraz zadania wymaganej stopy zwrotu γ. Jako wynik uzyskujemy udziały poszczególnych spółek w portfelu SEM oraz portfelu Markowitza, semiwariancję oraz wariancję stóp zwrotu powyższych portfeli. Liczba spółek oraz notowań branych pod uwagę jest ograniczona jedynie możliwościami komputera.

Zaproponowana metoda jest podobna do metody przedstawionej przez Markowitza w tym sensie, że wielokrotnie szacowane są elementy macierzy $\boldsymbol{D}(\gamma)$. Jednak przedstawiony algorytm pozwala na wykorzystanie dowolnej metody programowania kwadratowego lub nieliniowego, jak również na wykorzystanie gotowych programów jako podprogramów do wyznaczenia portfela optymalnego. Metoda Markowitza na to nie pozwalała, gdyż dostosowana jest do metody linii krytycznej.

6. Wybór portfela SEM złożonego ze spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie

Badania objęły 62 spółki wchodzące w skład indeksu WIG[2], nieprzerwanie notowane w całym okresie badań, tj. od 1 stycznia 2000 roku do 31 grudnia 2004 roku. Analiza dotyczyła półrocznych stóp zwrotu badanych walorów oraz zbudowanych z nich portfeli. Stopy zwrotu wyznaczono zgodnie ze wzorem [13]

$$z_{it} = \frac{n_{i,t+s} - n_{it}}{n_{it}} 100\%, \tag{59}$$

gdzie:

s – długość okresu inwestycyjnego wyrażona w dniach,

n_{it} – wartość notowania i-tego aktywu w momencie t,

$n_{i,t+s}$ – wartość notowania i-tego aktywu po s dniach inwestowania rozpoczętego w momencie t.

[2] Uwzględniono skład indeksu WIG na koniec 2004 roku.

Skuteczność zaproponowanej w rozprawie metody ilustruje tabela 1. Przedstawiono w niej zmiany składu portfela przy przejściu portfela początkowego, za który przyjęto portfel Markowitza, do portfela SEM. W tabeli zestawiono również odpowiadające tym składom wartości wybranych miar ryzyka i średnią stopę zwrotu z portfela. Przyjęto, że samouzgodnienie następuje po ustabilizowaniu się składu portfela z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.

Ostateczne rozwiązanie otrzymano w siódmej iteracji, gdyż w tej iteracji – biorąc pod uwagę zadaną dokładność – nie występują ani zmiany składu portfela, ani wartości semiwariancji przy założonej stopie zwrotu na poziomie 10%. W każdej iteracji akcje do portfela były wybierane spośród wyjściowego zbioru 62 spółek giełdowych. Największy spadek semiwariancji nastąpił w 1 i 2 iteracji, wtedy też nastąpiły największe zmiany dotyczące spółek wchodzących w skład portfela oraz proporcji między ich udziałami. Wyeliminowane zostały akcje BSK, JTZ, ZWC, a doszły akcje BRS. Natomiast od iteracji 3 nie nastąpiła żadna zmiana spółek wchodzących w skład portfela, zmieniały się tylko nieznacznie proporcje udziałów, również spadek semiwariancji był już niewielki.

Tabela 1

Zmiany składu portfela w kolejnych iteracjach zaproponowanej metody dla semiwariancji przy założonej stopie zwrotu na poziomie 10%

Emitent	Portfel początkowy	Skład portfela w *i*-tej iteracji						
		1	2	3	4	5	6	7
APT	0,0182	0,0920	0,2520	0,2897	0,2802	0,2791	0,2784	0,2784
BRS	–	–	–	0,0049	0,0114	0,0134	0,0150	0,0150
BSK	0,2868	0,2228	–	–	–	–	–	–
FSC	0,0818	0,1612	0,2453	0,2507	0,2596	0,2588	0,2578	0,2578
IRE	0,1213	0,1285	0,0692	0,0860	0,0964	0,0980	0,0982	0,0982
JTZ	0,0529	–	–	–	–	–	–	–
KRS	0,0184	0,1394	0,2080	0,2531	0,2517	0,2522	0,2527	0,2527
MSO	0,3329	0,2207	0,1445	0,0117	0,0090	0,0088	0,0096	0,0096
RPC	0,0315	–	0,0764	0,1036	0,0900	0,0882	0,0872	0,0872
TIM	0,0282	0,0268	0,0046	0,0002	0,0016	0,0014	0,0012	0,0012
ZWC	0,0280	0,0087	–	–	–	–	–	–
Razem	1	1	1	1	1	1	1	1
	portfel początkowy	miary ryzyka i średnia stopa zwrotu w *i*-tej iteracji						
		1	2	3	4	5	5	7
Średnia stopa zwrotu	10,0000	14,5943	20,7879	22,8721	23,2186	23,3166	23,3895	23,3895
Wariancja	59,8966	96,8790	261,1938	368,3906	370,4517	373,1335	375,3571	375,3571
Semiwariancja od 10 %	29,7647	16,5043	8,4629	7,7519	7,7135	7,7128	7,7127	7,7127

Ź r ó d ł o: obliczenia własne.

Zauważmy, że wyznaczony zaproponowaną metodą portfel jest bezpieczniejszy od portfela wyjściowego (niższa semiwariancja od założonej stopy zwrotu). Jednocześnie portfel SEM charakteryzuje się wyższą średnią stopą zwrotu.

Podobne własności mają portfele SEM dla pozostałych wybranych założonych stóp zwrotu ($\gamma = 1\%,\ 5\%,\ 10\%, ..., 30\%,\ 40\%, ..., 70\%$), co zestawiono w tabeli 2. Charakteryzują się one również w porównaniu z portfelami Markowitza mniejszą semiwariancją od założonej stopy zwrotu. Dla niskich założonych stóp zwrotu dla obydwu modeli otrzymujemy średnie stopy zwrotu z portfela wyższe od założonych, przy czym średnie stopy zwrotu dla portfeli SEM są wyższe niż dla portfeli Markowitza. Większość portfeli SEM jest wyraźnie bezpieczniejsza od portfeli Markowitza. Wraz ze wzrostem założonych stóp zwrotu generalnie zmniejszają się względne różnice między semiwariancjami od założonej stopy zwrotu portfeli SEM i portfeli Markowitza.

Tabela 2

Porównanie portfeli efektywnych minimalizujących wariancję i semiwariancję od założonej stopy zwrotu

γ	Portfele Markowitza		Portfele SEM	
	średnia stopa zwrotu (%)	γ-semiwariancja	średnia stopa zwrotu (%)	γ-semiwariancja
1%	7,6845	3,1966	21,3890	0,0444
5%	7,6845	12,7704	21,7482	1,1392
10%	10,0000	29,7647	23,3895	7,7127
15%	15,0000	47,0140	25,4736	24,4120
20%	20,0000	76,4903	25,5061	56,0959
25%	25,0000	122,2798	26,1579	109,6267
30%	30,0000	249,2002	30,0000	191,3985
40%	40,0000	561,9700	40,0000	485,2831
50%	50,0000	1047,3970	50,0000	1006,7468
60%	60,0000	1778,0615	60,0000	1775,7433
70%	70,0000	2828,2065	70,0000	2828,2065

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Dla maksymalnej stopy zwrotu wynoszącej 70% portfel SEM jest tak samo ryzykowny jak portfel Markowitza, jest to właściwie ten sam portfel. Przyczyną tego jest fakt, że zagwarantowanie wysokiej średniej stopy zwrotu z portfela ogranicza wybór do bardziej zyskownych akcji, aż do momentu gdy portfel SEM ma taki sam skład jak portfel Markowitza. Poza omówionym wyżej wyjątkiem portfele SEM mają inny skład niż portfele Markowitza, co pokazano w tabeli 3. Portfele SEM różnią się od portfeli Markowitza pod względem występujących akcji i proporcji między ich udziałami. Dla każdej założonej stopy zwrotu część firm występujących w obydwu rodzajach portfeli jest taka sama. Wyjątkowo dla $\gamma = 70\%$ portfel SEM jest identyczny z portfelem Markowitza.

Tabela 3

Składy portfeli Markowitza i portfeli SEM dla przykładowych założonych stóp zwrotu

γ	Emitent	Skład portfela		γ	Emitent	Skład portfela	
		Markowitza	SEM			Markowitza	SEM
1%	APT	–	0,2730	5%	APT	–	0,2780
	BHW	0,0718	–		BHW	0,0718	–
	BSK	0,2439	–		BSK	0,2439	–
	FSC	0,0049	0,2066		FSC	0,0049	0,2137
	IRE	0,1215	0,0138		IRE	0,1215	0,0362
	JTZ	0,1086	–		JTZ	0,1086	–
	KRS	–	0,2771		KRS	–	0,2793
	MSO	0,3464	0,0958		MSO	0,3464	0,0741
	RPC	0,0474	0,1337		RPC	0,0474	0,1187
	TIM	0,0167	–		TIM	0,0167	–
10%	APT	0,0182	0,2784	15%	APT	0,1285	0,2743
	BRS	–	0,0150		BRS	–	0,0402
	BSK	0,2868	–		BSK	0,2223	–
	FSC	0,0818	0,2578		FSC	0,1899	0,2986
	IRE	0,1213	0,0982		IRE	0,1409	0,1548
	JTZ	0,0529	–		KRS	0,0175	0,2250
	KRS	0,0184	0,2527		MSO	0,2584	-
	MSO	0,3329	0,0096		TIM	0,0426	0,0071
	RPC	0,0315	0,0872				
	TIM	0,0282	0,0012				
	ZWC	0,0280	–				
20%	APT	0,2383	0,2926	25%	APT	0,366	0,3147
	BRS	–	0,0337		BRS	–	0,0377
	BSK	0,0979	–		FSC	0,3215	0,3519
	FSC	0,285	0,3339		IND	0,0253	–
	IND	0,0134	–		IRE	0,2336	0,1646
	IRE	0,172	0,1624		KRS	–	0,1114
	KRS	–	0,1631		TIM	0,0536	0,0197
	MSO	0,1455	–				
	TIM	0,0480	0,0143				
30%	APT	0,5803	0,3310	40%	APT	0,7556	0,3417
	BRS	–	0,1045		BRS	0,1568	0,2789
	FSC	0,3289	0,3548		FSC	0,0876	0,2741
	IND	0,0275	–		IRE	–	0,1053
	IRE	–	0,1711	50%	APT	0,6236	0,3606
	KRS	–	0,0266		BRS	0,3764	0,4444
	TIM	0,0632	0,0120		FSC	–	0,1901
					IRE	–	0,0048
60%	APT	0,3739	0,3160	70%	APT	0,1241	0,1241
	BRS	0,6261	0,6409		BRS	0,8759	0,8759
	FSC	–	0,0430				

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Jak już pokazano, schemat SEM pozwala na znalezienie portfeli o niższej γ-semiwariancji w porównaniu z portfelami Markowitza. Powstaje problem, czy otrzymane rozwiązanie, jakim jest portfel SEM, odpowiada rzeczywiście minimum globalnemu semiwariancji. W celu rozstrzygnięcia tego problemu przeprowadzono serię symulacji numerycznych, które z braku ścisłego dowodu zbieżności procedury iteracyjnej do minimum globalnego semiwariancji świadczą, że przynajmniej w przypadkach przedstawionych w tabeli 3 ma to rzeczywiście miejsce [porównaj 13]. Testy te polegały na zmianie punktu wyjściowego procesu iteracyjnego. Oprócz portfeli Markowitza wybrano portfel równomierny i portfel jednoelementowy – zawierający akcje najbardziej zyskownej spółki BRS o średniej stopie zwrotu wynoszącej 74,9709%. Podana liczba iteracji oznacza, że dana iteracja z dokładnością do czterech miejsc po przecinku nie zmieniała już składu portfela i w konsekwencji również innych badanych charakterystyk rozkładu. We wszystkich przypadkach otrzymano zbieżność do tego samego portfela SEM, przy czym w przypadku portfeli Markowitza i portfela równomiernego otrzymuje się minimum w tej samej liczbie kroków, z wyjątkiem dla $\gamma = 70\%$. Portfel jednoelementowy jest nieco gorszym punktem startowym, jednak i w tym przypadku minimum jest w maksymalnie 10 krokach.

Tabela 4

Zbieżność procedury iteracyjnej
w zależności od składu portfela wyjściowego

γ	Liczba iteracji dla portfela wyjściowego		
	Markowitza	Równomiernego	Jednoelementowego
1	8	8	10
5	7	7	9
10	7	7	8
15	6	6	6
20	6	6	7
25	5	5	7
30	4	4	6
40	4	4	5
50	4	4	5
60	3	3	5
70	1	2	2

Ź r ó d ł o: Obliczenia własne.

Podsumowanie

Uzyskane wyniki obrazują, że przyjęcie danej miary ryzyka ma istotny wpływ na to, które spośród wszystkich możliwych do uzyskania portfeli zostaną uznane za efektywne. Różnice między portfelami efektywnymi, wyznaczonymi zgodnie z modelem Markowitza, a minimalizującymi semiwariancję od założonej stopy zwrotu są szczególnie wyraźne w przypadku niskich założonych stóp zwrotu. Wyznaczone portfele SEM charakteryzują się niższą semiwariancją od założonej stopy zwrotu niż portfele wyznaczone zgodnie z modelem Markowitza, czyli są bezpieczniejsze. Jednocześnie są to często portfele zyskowniejsze.

Zaletą zaproponowanej metody jest możliwość zastosowania jednej z dostępnych aplikacji programowania nieliniowego bądź kwadratowego do wyznaczenia portfeli o minimalnej semiwariancji.

Bibliografia

[1] BERNSTEIN P., DAMODAROU A., *Zarządzanie inwestycjami*, Wydawnictwo K.E. Liber, Warszawa 1999.

[2] EFTEKHARI B., PEDERSEN C., SATCHELL E., *On the volatility of measures of financial risk: an investigation using returns from European markets*, The European Journal of Finance, 2000, nr 6, s. 18–38.

[3] GRABOWSKI W., *Programowanie matematyczne*, PWE, Warszawa 1982.

[4] HAUGEN A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa 1996.

[5] HOGAN W., WARREN J., *Computation of the efficient boundary in the E-S portfolio selection model*, Journal of Finance and Quantitative Analysis, September 1972.

[6] MARKOWITZ H., *Portfolio selection*, J. Finance 7, 1952, s. 77–91.

[7] MARKOWITZ H., *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, John Wiley and Sons, New York 1959.

[8] MARKOWITZ H., *Portfolio selection*: *efficient diversification of ivestments*, Blackwell, Malden, Massachusetts, 1991.

[9] NAWROCKI D., *Optimal algorithms and lower partial moments: ex post results*, Applied Economics, 1991, 23, s. 465–470.

[10] OGRYCZAK W., RUSZCZYŃSKI A., *From stochastic dominance to mean-risk models: semideviations as risk measures*, European Journal of Operational Research, 116 (1999), s. 33–35.

[11] OGRYCZAK W., RUSZCZYŃSKI A., *On consistency of stochastic dominance and mean-semideviation models*, Mathematical Programming, Ser. B vol. 89, Springer Verlag KG, 2001, s. 217–232.

[12] OLESINKIEWICZ J., RUTKOWSKA-ZIARKO A., *Application of the Wolf's algorithm in constructing effective portfolios*, Acta Universitatis Lodziensis Folia Oeconomica, 2004, nr 175.

[13] RUTKOWSKA-ZIARKO A., OLESINKIEWICZ J., *Wykorzystanie semiwariancji do budowy portfela akcji*. Przegląd Statystyczny, 2002, nr 4.

[14] SORTINO F., SATCHELL S., *Managing downside risk in financial markets: theory, practice and implementation*, Butterworth – Heinemann, Oxford, 2001.

Methods of finding the effective portfolio for semi-variance

In the classic Markowitz model, risk is measured by the return rates variance. However, equal treatment of negative and positive deviations from the expected return rate is a slight shortcoming of variance as the risk measure. Markowitz defined semi-variance to measure the negative deviations only. However, finding the portfolio with minimum semi-variance is much more difficult than finding a portfolio with minimum variance.

The critical line method proposed by Markowitz in 1959 was the oldest method for finding optimum portfolios for semi-variances. That method was highly complicated and as a consequence the search for methods of finding a quasi-optimum solution continued. Quasi-optimum solutions are based on the co-lower partial moments. Until today they find application in practice. Their advantage is that it is possible to use one of many available software packages for square or non-linear optimization. Unfortunately the solution obtained is quasi optimal and it is not known how far it deviates from the optimum solution.

As a consequence, the need to formulate a new method that could offer optimum solution and at the same time would be simple and easy for software design as a means to select optimum portfolios with the minimum semi-variance from the assumer return rate appeared.

Keywords: *risk, semi-variance, portfolio selection, efficient portfolio*